AULA

53

O conceito de probabilidade

Introdução

Nesta aula daremos início ao estudo da **probabilidades**. *Quando usamos probabilidades*?

Ouvimos falar desse assunto em situações como: a probabilidade de ser sorteado, de acertar numa aposta, de um candidato vencer uma eleição, de acertar o resultado de um jogo etc. Portanto, *usamos probabilidades em situações em que dois ou mais resultados diferentes podem ocorrer e não é possível saber, prever, qual deles realmente vai ocorrer em cada situação.*

Ao lançarmos para o alto uma moeda e quisermos saber se o resultado é cara ou coroa, não podemos prever o resultado mas podemos calcular as chances de ocorrência de cada um. Este cálculo é a probabilidade de ocorrência de um resultado.

Por meio dos exemplos desta aula, você aprenderá o cálculo de probabilidades.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Qual a chance de dar cara no lançamento de uma moeda?

cara coroa

Solução:

Raciocinando matematicamente, os resultados cara e coroa têm as mesmas chances de ocorrer. Como são duas possibilidades (cara ou coroa) podemos dizer que as chances de dar cara é de 1 para 2. Isto é o mesmo que dizer que a probabilidade de o resultado ser cara é $\frac{1}{2}$ ou 0,5 ou 50%.

Neste exemplo calculamos intuitivamente a probabilidade de o resultado ser cara e você deve ter percebido que a probabilidade de dar coroa é a mesma, 50%.

No entanto, quando dizemos que a probabilidade é $\frac{1}{2}$ ou 50% isso não significa que a cada 2 lançamentos um vai ser cara e o outro vai ser coroa. O fato de a probabilidade ser $\frac{1}{2}$ ou 50% quer dizer apenas que as chances são iguais e que, se fizermos muitos lançamentos, é provável que aproximadamente metade deles dê cara como resultado.

EXEMPLO 2

O chefe de uma seção com 5 funcionários deu a eles 1 ingresso da final de um campeonato para que fosse sorteado. Após escreverem seus nomes em papéis idênticos, colocaram tudo num saco para fazer o sorteio. Qual a chance que cada um tem de ser sorteado?

Solução:

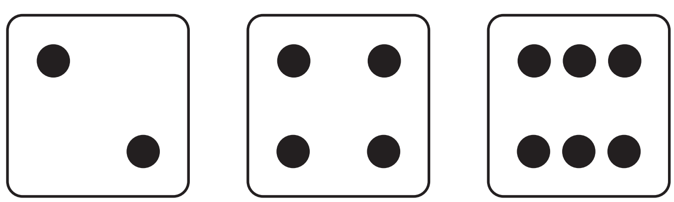
Os 5 funcionários têm todos a mesma chance de serem sorteados. No caso de Paulo, por exemplo, as chances de ser sorteado são de 1 para 5, ou $\frac{1}{5}$. Então, podemos dizer que a chance, ou a probabilidade, de cada um deles ser sorteado é de $\frac{1}{5}$, ou 0,2, ou ainda 20%.

EXEMPLO 3

No lançamento de um dado, qual a probabilidade de o resultado ser um número par?

Solução:

Para que o resultado seja par devemos conseguir:



Assim, temos 3 resultados favoráveis (2, 4 ou 6) em um total de 6 resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5, 6).

As chances de dar um resultado par são 3 num total de 6. Então, podemos dizer que a probabilidade de isso acontecer é $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$.

Generalizando essa solução:

$$P\ (\text{par}) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de resultados favoráveis a E}}{\text{n}^\circ \text{ total de resultados possíveis}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Onde P (par) significa *probabilidade de o resultado ser par*.

Nos três exemplos que acabamos de ver há dois ou mais resultados possíveis, todos com a mesma chance de ocorrer. A probabilidade de ocorrer um desses resultados ou um conjunto de resultados que satisfaçam uma condição ou exigência E, é representado por p (E) e calculado por:

$$\boxed{p\ (\text{E}) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de resultados favoráveis a E}}{\text{n}^\circ \text{ total de resultados possíveis}}}$$

EXEMPLO 4

No Exemplo 2 da Aula 48 vimos que, num restaurante que prepara 4 pratos quentes, 2 saladas e 3 sobremesas diferentes, existem 24 maneiras diferentes de um freguês se servir de um prato quente, uma salada e uma sobremesa.

No Exemplo 3 daquela aula descobrimos que havia, dentre os 24 cardápios possíveis, 6 cardápios econômicos. Qual a probabilidade de um freguês desavisado escolher uma das opções mais caras?

Solução:

Já sabemos que a probabilidade de escolher os mais caros será:

$$p(\text{mais caro}) = \frac{\text{n° de cardápios mais caros}}{\text{n° de cardápios possíveis}}$$

Se temos 6 opções econômicas num total de 24, temos 24 – 6 = 18 opções mais caras. Como o número de cardápios possíveis é 24, então:

$$p(\text{mais caro}) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

As chances de esse freguês escolher um dos cardápios mais caros é de **75%**.

EXEMPLO 5

Numa urna estão 10 bolas de mesmo tamanho e de mesmo material, sendo 8 pretas e 2 brancas. Pegando-se uma bola qualquer dessa urna, qual a probabilidade de ela ser branca?

Solução:

$$p(\text{branca}) = \frac{\text{n° de bolas brancas}}{\text{n° total de bolas}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \mathbf{20\%}$$

EXEMPLO 6

De um baralho normal de 52 cartas e mais 2 coringas retiramos uma das cartas ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) ser um ás?

b) ser um coringa, em jogos que também consideram o 2 como coringa?

Solução:

O número total de cartas é 54 sendo que há 13 cartas (ás, 2 a 10, valete, dama, rei) de cada um dos 4 naipes (copas, ouro, paus e espadas) e 2 coringas.

a) $p\ (\text{ás}) = \frac{\text{n° de ases existentes}}{\text{n° total de cartas}} = \frac{4}{54} = 0{,}07 = \mathbf{7\%}$

b) Como as 4 cartas com nº 2 também são consideradas coringas, a probabilidade de tirar um coringa será:

$$\text{p(coringa)} = \frac{\text{n}^\text{o}\ \text{de coringas}}{\text{n}^\text{o}\ \text{total de cartas}} = \frac{6}{54} = 0{,}11 = \mathbf{11\%}$$

EXEMPLO 7

No Exemplo 9 da Aula 52, vimos que, com 6 homens e 3 mulheres, podemos formar $C_9^5 = 126$ grupos de 5 pessoas e $C_6^5 = 6$ grupos de 5 pessoas nos quais só escolhemos homens. Supondo que as chances de cada um dos grupos é a mesma, qual a probabilidade de escolher:

a) um grupo onde não há mulheres;

b) um grupo onde haja pelo menos uma mulher.

Solução:

a) p (não mulher) = $\frac{6}{126}$ @ 0,05 = 5%

b) p (pelo menos 1 mulher) = $\frac{120}{126}$ @ 0,95 = 95%

Os valores possíveis para as probabilidades

No Exemplo 7 os grupos contados em **a)** e em **b)** completam todos os grupos possíveis (6 + 120 = 126). Portanto as possibilidades somadas darão $\frac{6}{126} + \frac{120}{126} = \frac{126}{126}$ ou 100% (5% + 95%).

Já sabemos que:

$$\text{p (E)} = \frac{\text{n}^\text{o}\ \text{de resultados favoráveis a E}}{\text{n}^\text{o}\ \text{total de resultados possíveis}} = \frac{m}{n}$$

A quantidade **m** será escolhida dentre as **n** existentes, por isso **m** deverá ser menor ou igual a **n** (m £ n) e a fração $\frac{m}{n}$ será menor ou igual a 1: p (E) £ 1.

Caso a condição E exigida não possa ser cumprida, ou seja, se não houver nenhum resultado favorável a E, o número **m** será zero e p (E) = $\frac{m}{n} = 0$

Percebemos ainda que a fração $\frac{m}{n}$ será sempre positiva pois **m** e **n** são números naturais.

Assim, podemos concluir que:

0 £ $\frac{m}{n}$ £ 1 ou 0 £ p (E) £ 1

EXEMPLO 8

Com os algarismos 1, 3 e 5 formamos todos os números de 3 algarismos possíveis. Dentre eles escolhemos um número, ao acaso.

a) Qual a probabilidade de escolher um número que seja múltiplo de 3?

b) Qual a probabilidade de o número escolhido ser par?

Solução:

O total de números formados por 3 algarismos é igual ao número de permutações possíveis com os algarismos 1, 3 e 5 em três posições, ou seja, $3! = 6$.

a) Como a soma dos algarismos $1 + 3 + 5$ é igual a 9, que é um múltiplo de 3, qualquer um dos números formados será múltiplo de 3. Assim, a probabilidade de isso ocorrer será:

$$P\text{ (múltiplo de 3)} = \frac{6}{6} = 1$$

b) Como qualquer dos algarismos 1, 3 e 5 colocados no final do número formado gera um número ímpar, não formaremos nenhum número par. Assim, como a quantidade de casos favoráveis é zero, temos:

$$p\text{ (par)} = \frac{0}{6} = 0$$

Um pouco de história

Os primeiros estudos envolvendo probabilidades foram motivados pela análise de jogos de azar. Sabe-se que um dos primeiros matemáticos que se ocupou com o cálculo das probabilidades foi Cardano (1501–1576). Data dessa época a expressão que utilizamos até hoje para o cálculo da probabilidade de um evento (número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis).

Com Fermat (1601–1665) e Pascal (1623–1662), a teoria das probabilidades começou a evoluir e ganhar mais consistência, passando a ser utilizada em outros aspectos da vida social, como, por exemplo, auxiliando na descoberta da vacina contra a varíola no século XVIII.

Atualmente, a teoria das probabilidades é muito utilizada em outros ramos da Matemática (como o Cálculo e a Estatística), da Biologia (especialmente nos estudos da Genética), da Física (como na Física Nuclear), da Economia, da Sociologia etc.

Exercício 1

De um baralho de 52 cartas é retirada uma carta ao acaso.

a) Qual a probabilidade de a carta retirada ser um rei?

b) Qual a probabilidade de a carta retirada ser uma figura (valete, dama ou rei)?

Exercício 2

No lançamento de um dado, qual a probabilidade de o número obtido ser menor ou igual a 4?

Exercício 3

No lançamento de dois dados, um verde e outro vermelho, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja:

a) 7

b) 1

c) maior que 12

d) um número par

Exercício 4

Na Aula 48 vimos que na SENA existem 11.441.304.000 maneiras de escolher 6 números de 01 a 50. Se você apostar em 6 números, qual a probabilidade de sua aposta ser a sorteada?

Exercício 5

O que acontece se você apostar em 5 números de 01 a 100? Qual a probabilidade de você acertar a quina de números sorteada?

Exercício 6

Suponha que sejam iguais as chances de qualquer uma das placas novas para automóveis (3 letras e 4 números) ser escolhida para o seu automóvel. Qual a probabilidade de você receber uma placa com as iniciais de seu nome em qualquer ordem?