

Umeen zenbatze ekintzari buruzko perspektiba berriak: Piagetengandik haratago

**José Domingo Villarroel Villamor
Teresa Nuño Angós**

Euskal Herriko Unibertsitatea

Umeei dagozkien aktibitateen artean, zenbatzea da, apika, berezko izaera matematikoa duen lehenengo ekintza. Eguneroko bizimoduan, guraso eta zaintzaileek haurtxoei hornitzen diete zenbakiak eta euren erabilpena ikasteko aukera anitz. Matematikako zeregin goiztiar hauek, ordea, galdera interesgarri bat iradokitzen dute: umetxoek ulertuko ote dute zer egiten duten kontatu bitartean? Artikulu honen zehar, galdera horren erantzuna bilatzeko egin diren saiakeren errepasoa eskaintzen da. Hasteko Jean Piageten ikusmoldearen arabera umeen aritmetika abilezien ezaugarriak azaltzen dira. Jarraian, autore honen teorian aintzat hartzen ez diren sei urtetik beherako haurren zenbatze-ekintzaren gaineko datuak azalduko dira. Amaitzeko, azken urteotan estimuluen ezaugarri kuantitatiboei erreparatzeko bi urtetik beherako umeek adierazten duten ahalmenen inguruko ikerkuntzaren birpasa agertuko da.

Counting is, perhaps, one of the first mathematical activities that children use to do. Parents and caretakers offer to children multitude of situations in which they can learn the numbers and their use. These early activities leave an interesting question: Do children understand what they do while they are counting? This article reviews the attempts to answer to this question. At the beginning the piagetian perspective related to arithmetical abilities of children will be explained and, next, data about the understanding of numbers of children younger than 6 years will appear on. The article will finish reviewing the research done about the abilities of children younger than 2 years old to notice quantitative characteristics of the stimulus.

Sarrera

Egun pentsamendu matematikoaren sorreraz eta bilakaeraz daukagun kontzepzioa, hein handi batean, Jean Piageten lanaren ondorioa da. Bere ikertze-aktibitate joriaren bidez, autore honek ezarri zituen gizakiaren lehenbiziko urteetako pentsamendu matematikoaren bilakaeraren ezaugarriak eta estreinako matematika kontzeptuak hautematen ahalbideratzen dituzten baldintzak.

Zenbakiaren nozioari dagokionez, Piagetek nabarmendu zuen zein izan daitekeen pentsamendu logikoaren gutxieneko garapen maila, zenbaketaren funts matematikoa ulertuko bada. Ildo honetatik, zenbaketarekin erlazionaturiko aktibitateak goiztiarrak izan daitezkeen arren, Piageten ustetan operazio-aurreko etaparen bukaera arte (sei urte inguruan) haurrek ez dituzte betetzen zenbaki kontzeptua ulertzen errazten duten baldintza logikoak (Piaget, 1965).

Piageten postulatuon ziurtasun esperimentalaren erabatekoa izan arren, azken urteotan datu berriak agertzen ari dira zeinek dakarten pentsamendu matematikoaren sorrerari buruzko perspektiba zabaltzea, betiere, ikuspegi piagetanoa ezeztatu gabe.

Datu esperimental berriok bereziki hiru esparrutatik eratortzen dira. Alde batetik, 2 eta 4 urte bitarteko umeek dauzkaten gaitasun aurre-matematikoen inguruko ikerkuntzak agertzen ditu ebidentziak, lehenago oharkabean igaroak zirenak (Butterworth, 2005). Bestalde, hainbat ikerlanek egiaztatu dute dagoeneko urte bete izan aurretik, gizakiok estimuluen erregulartasun kuantitatiboari erreparatzeko ahalmena izan badugula (Xu eta Arriaga., 2007; Feron et al., 2006; Brannon et al., 2006; Kobayashi, 2004). Azkenik, neurozientzien aldetik pentsamendu matematiko eta zenbakien ulerkuntzaren oinarri fisiologikoen gaineko datu ezin esanguratsuagoak ari dira plazaratzen (Alonso eta Fuentes, 2001; Díaz, 2006; Piazza et al., 2007; Cohen et al., 2007; Daniel, 2007, Welberg, 2007).

Artikulu honetan datu esperimental hauei buruzko errepasoa eskaintzen da, baita ebidentzia hauek zirriborratzen dituzten zenbaki kontzeptuaren sorrera eta bilakaerari buruzko perspektiba berriak ere; izan ere, ebidentzia hauek egungo pentsamendu matematikoaren gaineko paradigmatik ez ezik, planifikazio didaktikoak ere zeharo eragiten dituzte.

Xede hauekin, idazki honi hasiera ematen zaio umeen garapen kognitiboan zenbaketak duen garrantzia eta agerpena birpasatuz eta, honekin batera, zenbaki kontzeptuaren ulertze prozesuaz Piagetek utzi digun ikusmoldea ere jorratzen da. Jarraian, Gelman eta Gallistel-en ikuspegia aurkezten da; izan ere, autore hauek 2 eta 4 urte bitarteko umeek duten zenbaketaren konpetentziaz ikuspegi ezberdina agertzen dute. Honen ostean umeen sortzetiko zenbatze-

abilitateez egungo ikerkuntzak eskaintzen dituen datuen bilduma azaltzen dira. Idazkiaren amaieran ondorioetarako tarte zabaltzen da.

1. Operazio-aurreko etapako umeen zenbatze gaitasuna

Umeei dagozkien aktibitateen artean, zenbatzea da, apika, berezko izaera matematikoa duen lehenengo ekintza.

Eguneroko bizimoduan, guraso eta zaintzaileek umetxoei hornitzen diete zenbakiak ikasteko aukera anitz eta, besteak beste, urteak, orduak, prezioak, solairuak, bidaiak ala telebista saioak erabiltzen dituzte haurtxoak estimulatzeko abilezia matematiko oinarritzko honetan.

Umetxo askoren kasuan matematikarako sarbide hau oso goiztiarra izaten da. Durkin et al.-ek (1986) aditzera eman zuten lehenengo urtea egin aurretik ohikoak direla aitamen saiakerak umetxoei zenbakiak erakusteko eta, hartara, zenbatze-hitzak testuinguru ugarietan erabiltzen dituztela: abestiak, errimak, istoriotxoak, jokoak eta zenbakien sekuentzia espresuki errezitatzea. Gainera, zenbakiekin loturiko aktibitate hauen maiztasuna zein zailtasuna areagotzen dira haurtxoak koskortu ahala (Benigno eta Ellis, 2004).

Praktika sozial hauen bidez umeen sistema kognitiboan zubia ezartzen da, berez, sortzetik, haurtxoek dakarten zenbakizko zentzua eta geroko matematika lorpen aurreratuen artean; hain zuzen, pentsamendu matematikoaren lehenbiziko urratsa abiaraziz (Butterworth, 2005).

Arestian aipaturiko matematikako zereginekiko hurbilketa goiztiar horiek galdera interesgarri bat iradokitzen dute: umetxoek ulertzen ote dute zer egiten duten kontatzen duten bitartean?

Galdera honen erantzuna bilatu dutenen artean Jean Piaget izan zen lehenbizikoa. Autore honen arabera lehen haurtzaroko umeek (hau da, 6 urtetik beherakoek) zenbakien sekuentzia esan ahal izango dute; baita, akaso, ikasi ere nola aplikatu zenbait objektu ala ekintzetan baina, bere ustez, haurrek ezingo die zenbakiei hauteman ele sorta bati egin diezaioketen baino zentzu handiagorik.

Piageten ikusmolde hau errotzen da operazio-aurreko etapako umeek kontserbazio, trantsitibotasun eta serieen eraketaz adierazten duten ulermenaren analisisian zeinek nabarmentzen duen adin honetako umeek nekez uler dezaketen zenbakien kardinal eta ordinal zentzua.

Zenbakien kardinal zentzua multzo bateko kopuruari dagokio eta hala, zenbaki berbera duten objektu multzo orok elementu kopuru berbera daukate eta multzootako elementuen bana-banako korrespondentzia egin daiteke. Ordinal zentzua, ordea, zenbaki

ezberdinen arteko erlazioari dagokio eta umeak ulertu behar du zenbaki-sekuentzia bateko zenbakien ordena magnitude gorakorra dela; non, esaterako, 5 izango da handiagoa 3 baino, zeren eta 4 da 3 baino handiago eta 5 handiagoa 4 baino.

Arestian aipatu bezala, Piagetek uste zuen operazio-aurreko etapako umeek ezin dituztela zenbakien zentzu kardinal eta ordinal haiek ulertu, besteak beste, zenbakiaren kontserbazioaren nozioa bereganatu gabe dutelako; hau da, multzo bateko elementu kopuruak irauten du, multzoan eragin daitezkeen aldakuntzak gorabehera.

Esaterako, ilaran jarritako bi objektu-multzo konparatzean umeek ilaren luzerari erreparatuko diote erabakitzeke zein multzok duen objektu kopuru gehien eta hau gertatzen da operazio-aurreko etapako umeetan multzoen objektuak zenbatzen jakin arren. Ondorioz, adin honetan zenbakiak errezitatzeak, baita kontatzeko kasuan ere, ez du bermatzen hurrek ulertzen dutela objektu-multzoetan egiten diren itxuraldaketek objektu-kopuruan eraginik ez duela.

Honen ildotik, Gréco-k (1962) bereizi zituen bi kontserbazio mota; multzoetan zenbatze-sekuentzia zuzen erabiltzetik eratortzen dena eta multzoetako objektu-kopuruari dagokiona (Chamorro et al., 2006).

Lehenengo kontserbazio motak adierazten du umea konturatzen dela bi multzok *zenbaki* berbera dutela, baina *zenbaki* zentzu hori zenbatze-sekuentzia erabiltzearekin baino ez litzateke erlazonatuko. Fenomeno honen ondorioz, bi multzotako elementuak kontatzeko zenbatze-hitz egokia erabili arren, umeek baieztatzeko multzo batek elementu gehiago duela beste bigarren batek baino, adibidez, multzoetan luzeenari zenbatasun handiago esleitzen diolako.

Multzoen arteko zenbatze-hitz hutsean oinarrituriko kontatze-ahulezia honi "*quotité*" izendatu zuen Grécok; bereizteko 7 urte inguruan umeek bereganatzen duten "*quantité*" izeneko bigarren kontserbazio mota zeinen bidez umeek hautematen duten multzoen itxuraldaketek kantitatean eraginik ez dutela (Gréco, 1962).

Bestalde, operazio-aurreko etapako umeek zenbakiaren zentzu kardinal eta ordinala ulertzeko Piagetek ezartzen duen beste oztipoetako bat serie bateko elementuen arteko erlazioaren inguruko ulermen falta zeina nabarmentzen den ikerlariak egin zituen trantsitibotasun eta serieen esperimentuetan.

Alde batetik zailtasun nabarmenak dituzte tamainaren arabera zenbait elementuren serie ordenatua egiteko baina, honez aparte, umeek ulertu arren *A objektua* handiago dela *B objektua* baino eta *B* handiagoa izan daitekeela *C objektua* baino, ezin dituzte bi baieztapen horiek aldi berean koordinatu eta, hala izanik, ez dira

gai ondorioztatzeko *A objektuak* handiagoa izan behar duela *C* baino. Piagetek uste zuen esperimentu hauek adierazten zutela haurtxoek ezin zutela ulertu zenbaki sekuentzia goranzko magnitude gisa.

Ebidentzia hauek Piaget pentsatzera bultzatu zuten haurrak kontatzeko gai direla zenbaketaren adiera ulertu baino urte dezente lehenago baina errutinazko berba-akzio hau, adiera matematikorik gabekoa dela operazio-aurreko etapa gainditu arte.

2. Zenbaketarako trebetasunaren aurretiko printzipioak

Egiatan, nekez argudia daiteke ezer askorik Piageten ikuspegi honen aurka. Umetxo batek bi objektu multzo zenbatutakoan, 5na elementu dutela badio eta hala eta guztiz ere, haietariko batek besteak baino *gehiago* duela argudiatzen badu, ezin da baieztatu ume horrek 5 zenbakiaren esangura ulertzen duela. Era berean, ezin da baieztatu umeak zenbakien kontzeptua bereganatu duela honek ez badu ulertzen, 3 baino gehiago 5 direla; hain zuzen ere, 5 delako 4 baino handiagoa eta azken hau baino txikiago 3 delako.

Hala eta guztiz ere, laurogeigarren hamarkadaren inguruan, Gelmanek eta Gallistelek (1978) eta Gelmenek eta Meckek (1983) agertu zuten zenbaketaren ulerkuntzari buruzko bestelako proposamena.

Autore hauek ezberdintzen dituzte bi kontzeptu garrantzitsu: alde batetik, zenbatze-ekintza egiten den bitartean norberak zertan ari den ulertzeko beharrezkoak diren ulertze-oinarriak edo printzipioak eta, bestetik, akatsik gabe printzipio horiek martxan jartzeko, une orotan eta testuinguru ezberdinetan. Azken honi zenbatzeko trebetasuna deritzote.

Ikerlari hauen ustez, umetxoen garapenean zehar aldea suertatzen da zenbaketaren ulertze-oinarri edo printzipioak hautematen direnetik, beroiek erabilpen praktiko eta errorerik gabeko trebetasuna atzeman duten arte. Haien ustez, 2 eta 3 urte bitarteko umeek zenbatze-printzipioak bereganatuta dituztela susmatzeko behar bezalako argibiderik egon badago eta, honen ildotik, baieztatu daitekeela umeek jakin badakitela zertan ari diren zenbatu bitartean. Hala ere, ikerlarion ustetan, printzipio horien praktikan umeek errore dezente egin ditzakete, ez zenbatze-printzipioak ulertze faltagatik; baizik eta, printzipio horien praktikarako denbora luzexegoa beharko dutelako.

Zenbatze-printzipio aipatuok ondoko hauek dira eta hauetatik lehenbiziko hirurak “nola zenbatu” ideiarekin zeharo erlazionaturik daude:

1. Umeak ulertu behar du multzo beteko objektua kontatzeko, multzotako guztiak kontatu behar dituela eta bakoitza behin

baino ez. Autoreok printzipio honi bana-banako printzipioa deritzote eta Piageten bana-banako korrespondentziarekin konparatuta, exigentzia kognitibo baxuago ezartzen du zeren eta, Piagetenena ez bezala, ez dagokio multzoen ezberdinen arteko erlazioari, objektuak zenbatzen jakite soilari baizik.

2. Bestalde Gelmanek eta Gallistelek aipatzen dute zenbatzeko umeak orden iraunkor baten bidez erabili behar dituela zenbatze-hitzak; hau da, multzo bateko elementuak orden jakin batean kontatzen dira eta beti orden berberaz kontatu behar. Honi deitzen diote orden egonkorraren printzipioa eta kasu honetan, Piagetek aipaturiko ordinal zentzuarekin antza du. Azken honen aldean, ordea, kontaketa, zenbaki sekuentzi egonkor eta iraunkor batean erabiltzean datza, zenbakiak magnitude gorakor baten sekuentzia gisa ulertzeraino iritzi gabe.
3. Kontatzen jakiteko haurrak ulertu behar duen beste printzipioetakoa kardinal-zentzuarekin dago lotuta, baina, berriro ere, ez Piagetek aipatzen zuen adiera berean. Piagetek kardinal-zentzua ulertzen zuen objektu-kantitate bereko multzoen arteko konparazio moduan, Gelmanek eta kolaboratzaileek darabilten kardinal-zentzua, ordea, soil-soilik zerari dagokio: multzo bateko elementua kontatzeko aipatzen den azken zenbakiak multzo osoa errepresentatzeko balio duela ulertzeari.

Azken proposamen honen arabera, kardinal zentzua ez legoke lotuta multzoen arteko konparaketa batekin, baizik eta multzo bakar baten balioarekin (hau da, ulertzearekin “bat, bi eta hiru” zenbatzean “hiru”-k balio duela adierazteko multzoan zenbat objektu dauden).

4. Abstrakzio printzipioa. Honen arabera, multzo bateko zenbakiak ez duela erlazorik multzoko elementuen ezaugarri kualitatiboekin eta, ondorioz, edozein entitate, objektu ala jazoera kontatzekoa dela.
5. Objektu-hurrenkeraren inportantziarik eza; hau da, zenbatze-emitza ez da aldatzen elementuak kontatzeko erabiltzen den ordena edozein izanik ere. Hala, erreskadan jarritako pilotatxoek zenbatze-ekintza berdintsu has daiteke ezkerretatik eskuinetara zein alderantzizko eran.

Zenbatzerako ulertze-oinarri edo printzipio hauek ume txikiak ere (2 eta 3 urtekoak, ere) ulertzeko gauza dira, ohiko praktikan akatsak izan ditzaketen arren eta, honen ondorioz, haurtxoak kontatzen hasten direnean zertan ari diren jakin badakitela aitortu beharra dago. Esaterako, Gelmanek eta kolaboratzaileek eginiko ikerlanetan erregistratzen zuten 2 eta 3 bitarteko haurtxoek kontatzen zutela orden iraunkor batez, multzoko objektu guztiak

kontatzen zituztela baina behin baino ez eta objektu-multzoari esleitzen ziotela kontaketa aipaturiko azken zenbakia. Honez aparte, umetxoak ohartzen ziren txotxongilo batek egiten zituen kontatze akatsak (objektu multzo baten kopurua adierazteko azken zenbaki aipatua ez erabiltzea ala objektu guztiak ez kontatzea).

3. Berbazko errutinak matematika kontzeptuen ulerkuntzan

Azaldutakoaren arabera badirudi Piaget eta Gelman-k zenbaketari buruzko kontzeptzio ezberdinak dituztela. Lehenengo taulan aurkezten da autore bi hauen proposamenen konparaketa (ikusi taula 1).

Piagetek multzoen arteko erlazioetan kokatzen du kontaketa ulerkuntza eta, zehatzago, kardinal eta ordinal zentzua hautemateari deritzo ezinbesteko gaitasuna kontaketa zer den ulertzeko.

	Gelman	Piaget
Kardinal-zentzua	Kontatze-ekintzan erabilitako azken zenbatze-hitzak multzo osoa irudikatzeko erabilpenean	Kopuru bereko multzoen arteko erlazioaren ulerkuntza
Korrespondentzia	Multzo bateko objektu oro kontatu behar dira baina ezin dira zenbatu behin baino gehiagotan.	Umeak ulertu behar du multzo ezberdinen elementuen arteko banan-banako correspondentzia
Zenbatze-hitzen ordena	Umeak erabili behar du zenbatze-hitzen sekuentzia egonkorra.	Umeak ulertu behar du hitz sekuentziaren esangura kualitatiboa; hau da, sekuentziak errepresentatzen du goranzko magnitudea.

1. Taula. Piaget eta Gelmanen abiapuntuak umeen zenbatzeko ulermena aztertzeko

Gelman-ek, ordea, zenbatzeko prozedurazko abilezien praktika zuzena eta zenbatze-printzipio oinarritzkoen ulertzea bereizten ditu eta, modu honetan, azaltzen saiatzen da haur txikiek zenbatzean zertan ari diren jakin badakitela baldin eta praktikotasunarekin lotuta dauden printzipiook agertzen badituzte.

Zenbaiten ustetan, Gelman-en ikusmoldeak zenbatzearen gaineko exigentzia kognitibo apalagoa eratortzen da eta

proposaturiko kontaketari buruzko ulerkuntza hurbilago dagoela berbazko errutina hutsetik, benetako ulerkuntza matematikotik baino (Bryant, 1996).

Ildo honetatik eta kardinal zentzuari dagokionez, ba omen dago ebidentziarik azalarazten duena umeei objektu-multzo baten kontaketa azken zenbakia erabil dezaketela multzo horren elementu kopurua adierazteko; hain zuzen ere, konturatzen direlako azken zenbatze-hitz hori garrantzitsua dela. Hala eta guztiz ere, inportantzia hori zertan datzan ulertu gabe gera daiteke zeren eta azken zenbaki horren adiera kuantitatiboa ez dute hautematen (Sophian, 1988; Fuson et al., 1988).

Ikusi batean, matematika sinboloen errutinazko erabilpenak pentsamendu matematikoarekin erlazio eskasa izan dezakeela eman arren, nabarmendu beharra dago ikuspegi sozio-konstruktibistatik gidaturiko matematika diskurtsoen analisiak azpimarratzen duela kontzeptu matematikoen ulertze-prozesuan, estereotipo edo klise linguistikoei jokatzeko duten zeregin funtsezkoa (Sfard, 2000a, 2000b).

Ikusmolde honen arabera, matematikako nozioak ulertzeko hasberriak argitu beharra du korapilo latza: matematika-kontzeptuak komunikatu eta ulertzeko sinboloak erabili behar ditu baina sinboloen erabilpen zuzena egiteko aurretik kontzeptuak barneratua izan beharra dago. Badirudi, hortaz, hasberriak irtenbiderik ez duela: sinbolo matematikoen erabilpen oso eta zuzenik ezin du egin kontzeptuak bereganatuta ez daudelako baina, bestalde, nola hautemango ditu kontzeptuen zentzua ez baditu sinboloak erabiltzen?

Sinboloen erabiltze estereotipatua dago korapilo horren askatze-gakoa. Hasberriak matematikako sinboloak (idatzi ala berbazkoak) erabiltzen hasi behar du kontzeptua bera osatua izan baino lehen baina, betiere, klise edo estereotipo linguistikoen bidez. Errutinazko estereotipo linguistiko hauek matematikako diskurtsoa exijentzia formaleko mugetara egokitzen lagunduko diote hasberriari (Sfard, 2000b).

Kontzeptuen eraketarako ikuspegi sozio-konstruktibista honetan, interakzio komunikatiboa zeharo garrantzizkoa suertatzen da, izan ere kontzeptu matematikoen sortze-prozesuan akzio komunikatiboak adieraziko du estereotipo linguistikoak egokitzen denetz sinboloek duten esanahi formalekara.

Kontaktaren esparrura bueltatuz eta perspektiba sozio-konstruktibista honetan oinarriturik, Gelmanek eta kolaboratzaileek aipatzen dituzten zenbatze-printzipioak ez dirudite aski baieztatzeko umeei zenbatze-hitzen zentzu matematiko osoa barneraturik dagoela baina bai nahiko direla umeari ziurtatzeko bere kontatze-ekintza testuinguruak exijitzen dizkion molde formalekara egokitzen dela.

Gelmanek eta kolaboratzaileek beraiek deitzen zioten bere proposamenari “gaitasunak baino lehenagoko printzipioak” delakoa; hain zuzen ere, azpimarratzeko bost printzipiook errespetatzen dituzten umeei (2 eta 4 urte bitartean jazotzen den egokiera) zenbartzeko oinarria dutela, erabateko gaitasun kontzeptuala bereganatu gabe izan arren.

Alde batetik, umeari zenbatze-ekintza ahalbideratzen diolako eta, bestalde, geroko kontaketa funts kontzeptuala hezurmamitzen laguntzen diolako, badirudi Piagetek aipatzen zuen kardinal eta ordinal zentzuen bereganatze-unea baino lehenagoko printzipioen fase honi erabateko izaera matematikoa erantsi dakiokela.

4. Jaiotzetiko zenbakizko kognizioa

Arestian aipatu den legez, badirudi zenbaketarekin lotuta dauden praktika sozialek (urteak, solairuak ala jostailuak kontatzeak, esaterako) zubi-lan egiten dutela berez, sortzetik, haurtxoek dakarten zenbakizko zentzua eta geroko matematika lorpen aurreratuen artean (Butterworth, 2005).

Ildo honetan, azken hamarkadotan ikerlan ugari agertu dira zeinek aditzera ematen duten umetxoek, bi urte izan aurretik, izan badutela ukitze eta ikus-entzunezko estimuluaren erregulartasun kuantitatiboari erreparatzeko gaitasuna.

Ikerkuntza arlo honek ireki ditu ikuspegi berriak, zabaltzera behartzen dutenak egun matematikaren pentsamenduaren garapenari buruz dagoen eredu.

Jarraian umetxoen zenbakizko kognizioaren gainera ikerketaren emaitza nagusien birpasa aurkeztuko da. Zenbait aspektu metodologikoak ere azalduko dira; izan ere, arlo honetako ikertze-metodologiak ezagutzeko moduko berezitasunak ditu. Ondoren, ikerkuntza-lerro honen errepasoa aurkeztuko da, lehenbizi ibilbide historikoa agertuz eta, azkenik, egungo panorama azalduz.

4.1. Aspektu metodologikoak

Umetxoen zenbaki kognizioa aztertzeke, bereziki, bi metodologia mota erabiltzen da: **ohitze-metodoa** eta **presuntzio haustuarena** (Feigenson et al., 2004).

Ohitze-metodoaren funtsa zerean datza: Lehenik zenbatekotasun jakin bat ikusten ohitu behar da umea. Esaterako, 8 zirkulu beltzez osaturiko irudiak aurkezten zaizkio zenbait aldiz. Irudi hauetako zirkuluen tamaina eta posizioa aldatuz doa irudiz irudi.

Bigarren fase batean (test fasea, alegia) zenbatekotasun bera dute estimuluen tartean, beste kopurua duen irudia aurkezten zaio umetxoari (adibidez, 16 zirkulu beltzekoa). Umearen aurpegira zuzenduriko kamera baten bidez grabatzen dira bere begitartekoen keinuak; hain zuzen, neurtzeko zenbat denbora so egiten duen banan-banan agertzen zaizkion ikusizko estimuluetara.

Ikerlariak kontrolatu behar du zenbatekotasuna ez diren bestelako aldagaiek eragin ez ditzaten esperimentuaren emaitzak; hau da, ohitzeko faseko irudien ezaugarri jarriak (tamaina, distira, dentsitatea eta abar) eta test fasekoak ezin dira ezberdinak izan.

Ohitze-metodologiaren bidez eskuratu diren emaitzek argi adierazten dute test fasean estatistikoki umeek luzaroago geratzen direla begira zenbatekotasun berria irudikatzen duen estimuluetara, estimulu ohikoetara baino. Adibideekin azaltzeko, 8 zirkuluz osaturiko estimuluaz umea ohitzen badugu, geroan, test fasean, 16kora so egingo du luzaroago 8kora baino (eta alderantziz). Gauza bera ikusi da 16 *versus* 32. Baina esperimentuok umeen mugak ere erakusten dituzte; izan ere, umeek kale egiten dute bereizteko 8 *versus* 12 eta 16 *versus* 24. Honen esplikazioak zera ei da: umeak zenbatekotasun arteko gutxieneko distantzia behar duela aldea antzemateko.

Presuntzio haustuaren metodologian ere maiz ikusizko estimulua erabiltzen dira baina azken urteotako esperimentuetan ukitze eta entzunezkoak ere maneiatu dituzte. Aurreko metodologian bezala, umetxoaren begiratze-jokabidea aztertu eta neurtzean datza.

Aldea, ordea, zera da: umeari agertzen zaizkio aurreikusteko moduko gertaerak eta, tartean, presuntzioa hausten dutenak. Adibidez, umetxoari panpinatxo bat erakutsi ostean, berau estalki batez ezkutatzen da. Jarraian, estalkiaren atzean beste panpinatxo bat jartzen dela erakusten zaio nabarmen. Amaitzeko kentzen da estalkia eta agertzen badira 2 panpinatxo, horixe da aurreikusteko moduko gertaera. Aitzitik, esperimentatzaileak, truku baten bidez, 3 panpinatxo agerrarazten badu, horixe da, presuntzioa hausten duen jazoera.

Metodologia hau aplikatu diren esperimentuetan estatistikoki frogatu da umeak luzaroago geratzen direla begira presuntzioa hausten duen jazoeretara (adibidez $1+1 = 3$), aurreikusteko moduko gertaeretara baino (adibidez, $1+1=2$). Bestalde, ikusi da zentzumen ezberdineko informazioa ere integra dezaketela.

4.2. Birpasa historikoa

60. hamarkadaren bukaeran argitarazten hasi ziren lehenengo lanek aditzera ematen zituzten gizakion zenbakizko kognizio-ahalmena uste baino goiztiarragoak izan zitekeela.

Lan aitzindari horien errepasoari hasiera eman dakioke Mehler eta Bever-en (1967) eta Gelman-en (1972) ikerlanak aipatuz; izan ere autore hauek erregistratu zuten 2 eta 3 urte bitarteko umeei kantitate txikiekin zenbakizko informazioa bereizteko gaitasuna izan bazutela. Gelman-ek, gainera haratago urrats bat eman zuen baieztatzean:

...objektu kopuru gutxiko multzoekin, bi eta hiru urte bitarteko haurtxoek azaltzen duten jokabideak pentsatzeko hizpidea ematen du benetan adin honetan haurtxoek jakin badakitela multzoek aldaezin dirautela lekualdatze moduko aldaketetan baina ez, ordea, kentze ala batze-akzioen ondoren...are gehiago...horren umetxo izanik ere badirudi ulertzeko gauza direla kenketa eta batuketa eragiketen erlazio alderantzikoa (Gelman 1972, 162 orr.).

Ildo beretik, Starkey eta Cooper-ek (1980) erakutsi zuten bi urteko umetxoek zenbakizko gaitasuna agertzen zutela, hain zuen ere, elementu gutxiko multzoen diskriminazio, irudikapen eta ezagutzearekin lotuta zeudenak. Ikerlari hauek seinlatu zuten euren emaitzak aitzat hartuz, berbazko kontaktaren aurretiko egitura kognitibo aitzindari baten existentzia suposatzea beharrezkoa zela.

Bestalde, Starkey-ek et al.-ek (1983) umetxoek begiratzeko jokabidea kontrolatu zuten aztertzeke ea ikusizko estimulu mota jakin batekin preferentzia azaltzen zuten sekuentzia soinuaren baten ostean. Emaitzek argi erakusten zuten sekuentzia soinuaren bat entzun ostean, haurtxoek luzaroago so egiten zutela multzo jakin batzuetara eta multzo horien elementu kopurua bat zetorrela sekuentzia soinuaren adituaren hots-kopuruarekin. Ikerlariok ondorioztatu zuten ezinbestean umetxoek mekanismo kognitiboren bat izan behar zutela estimuluetatik zenbakizko informazioa erauzten ahalbideratzen ziena.

Horretaz gainera, 80.hamarkadan ere plazaratzen hasten dira datu berriak urte bete gabeko haurtxoek objektu fisikoen gaineko ulerkuntza-mailaz. Baillargeon-ek et al.-ek (1985) eginiko ikerketan frogatu zuten 5 hilabeteko haurrek estimuluetatik zenbategotasun-informazioa eskuratzeko gauza izateaz aparte, nolabait, ulertzen zutela objektuek irautea zutela begi-bistan desagertzen baziren ere. Ildo beretik, Baillargeon-ek (1987) aditzera eman zuen 3 eta 5 hilabetekoek ulertzen zutela objektuek existitzen segitzen dutela ezkutuan egonik ere.

Objektuak begi-bistan egoteari uzteak objektuaren existentzia eragiten ez duela ulertzea garrantzi handiko aspektua da zenbakizko kognizioa izan ahal izateko. Simon-ek et al.-ek (1995) adierazten duten bezala *“edozein ulerkuntza zenbaki ala aritmetika kontzeptuen inguruan, nahitaez, lotuta dago objektu fisiko eta euren existentziarako baldintzen ulerkuntzarekin”*.

Bestalde, Wynn-ek (1992) ikertu zuen ea umetxoek zeukaten multzoetan eginiko batuketa eta kenketa ekintzekiko sentsibilitatea. Hartara, 5 hilabeteko haurtxoei erakusten zien panpinatxo bat, segituan pantaila baten bidez ezkututzen zena. Geroan, umetxoari erakusten zitzaion panpinatxo bat pantailaren atzean ere jartzen zena. Esperimentuaren amaieran pantaila erretiratzen zen panpinak berriro begi-bistan erakusteko baina aldizka agertzen zen panpinatxo bakar bat, bi ala hiru. Haurtxoaren begiratze-jokabidea miatuz, Wynn-ek aurkitu zuen umetxoek estatistikoki luzaroago so egiten ziotela $1 \text{ panpinatxo} + 1 \text{ panpinatxo} = 3 \text{ panpinatxo}$ (presuntzioa hausten zuen jazoera) $1 + 1 = 2$ (aurreikusteko moduko gertaera) delakora baino. Esperimentuaren metodologia berberaz, batuketaren orde, kenketan oinarritzen bazen berriro ere umeek begiratzen zuten luzaroago presuntzioa hausten zuen jazoera (kasu honetan, $2 - 1 = 1$ delakora) aurreikusteko modukora baino ($2 - 1 = 1$). Eraitza hauetan oinarriturik, Wynn-ek argudiatzen zuen bost hilabeteko umeak kapaz direla alde aurretik hautemateko $1+1$ eta $2-1$ motako akzioen ondorioak.

Objektu-kopuru txikiko multzoetan egiten diren batze eta kentze-akzioez jabetzeko Wynn-ek aurkitu zuen umetxoek sentsibilitate honen erreferentzia, beste autore batzuek ere egin dute (Simon, Hespos eta Rochat, 1995; Uller et al., 1999; Chiang eta Wynn, 2000).

4.3. Egungo egoera

Azken hamarkadetan bilduriko datu esperimentalak direla eta, zalantza gutxi geratzen da ume jaio berriek daukaten zenbakizko zentzuaz zeinen bidez zenbait kantitate diferentzia eta zenbatetsi ditzaketen (Xu eta Arriaga, 2007; Spelke eta Kinzler, 2007). Egungo erronka nagusia zenbatekotasuna irudikatzeko sistema aurrelinguistiko honen deskribapenean datza.

Puntu honetan azken urteotan eztabaidagai biziena zera izan da: estimuluen ezaugarri zenbakizkoak prozesatzeko ea haurtxoek duten sistema bakarra (zenbatekotasun edozein izanik ere) ala bikoitza, (bata kantitate txikietarako eta, beste bat, handietarako). Itxura guztien arabera, bigarren aukeraren inguruan adostasun mailarik zabalena biltzen ari da (Xu eta Arriaga, 2007; Féron et al., 2006; Feigenson et al., 2004).

4.3.1. Kopuru txikiko multzoez hautemateko sistema

Eredu honen arabera, objektu, jazoera ala soinu multzo txikiekin (1, 2 eta 3 elementurekin), umeak elementu bakoitzaren ezaugarri sentsitiboak kontrolatuz maniatuko du pertzepzio bidezko informazioa. Hau dela eta, esan daiteke hautemate-egintza lotuago

legokeela indibidualtasun sorta batekin, taldearen kardinal-zentzuarekin baino. Zenbakiko erregulartasunei erreparatzeko sistema honen parekoa nagusien aditasunei buruzko ikerkuntzan deskribatu da eta "*object file*" delako modeloa da ezaguna (Kahneman et al., 1992).

Modelo honen funtsa pertzepzioaren bidez jasotzen dugun informazioa kaotikoa ez izateko objektuen erregulartasunak hautemateko beharrezan datza, denboraren zehar suerta daitezkeen aldaketak eta lekualdatzeen gorabehera. Hartara, estimuluen oinarritzko pertzepzio-prozesamendua eta beraien goimailako prozesamendu kontzientearen artean eredu honek beharrezkotzat jotzen ditu estimuluen errepresentazio bitartekoak, aurreko bi mailaren arteko lotura bermatzen dutenak. Errepresentazio artekari honi "*object file*" deitzen zaio eta objektu-estimulu baten ezaugarriei atxikiko litzaieke objektu honen espazio eta denborazko aldaketen barrena. Modu honetan *objektutasuna* hautemateko gauza gara (hau da, objektuaren izatasuna errekonozitzen dugu eta objektuak entitate gisa kontzientzian irauten du itxuraldaketa, mugimenduak ala ezkutaketa izan arren (Mitroff et al. 2005; Noles et al. 2005).

Modelo honen ildotik eta umeen kasuan egin diren ikerlanek ebidentzia aski mahairatzen dute haurtxoek *objektutasunaren* inguruko irudikapenak sortu eta mantentzen dituztela "*object file*" delako errepresentazio artekari hauei esker (Cherries, Wynn eta Scholl, 2006).

Multzo txikien zenbatekotasunaz ohartzeko umeek daukaten ahalmenera bueltatuz, puntu honetaz aurkitu den adibide interesgarrienetakoak beraien aritmetika-aldaketaz jabetzeko adierazten duten ahalmenean datza.

Ikerkuntza-lerro hau hasten da aurreko ataletan azalduriko Wynn-en (1992) esperimenduekin. Hala ere, ikerlan honek kritika zorrotzak jaso zituen, bereziki, Cohen eta Marks (2002) autoreen aldetik; izan ere, hauen arabera umeek $1+1=1$ moduko eszenetara luzaroago so egiten zuten, aritmetikaren ulerkuntzarekin zerikusirik ez zuen beste arrazoi batengatik. Ikerlari hauen ustez, eta Hunter eta Ames-en (1988) lanetan oinarriturik, umeek, estimulu berrien gaintetik, azalarazten dute estimulu ekanduetarako preferentzia eta, ondorioz, panpinatxo bat erakutsi gero, begiratuko dute panpinatxo bat agertzen deneko eszenara, 2 panpinatxo erakusten duenera baino (hau da, $1+1=1$ moduko testa). Era berean, hasiera batean bi panpinatxo agertzen badira, geroan luzaroago so egingo diote $2 - 1 = 2$ erako testera, $2 - 1 = 1$ delakora baino. Autoreon arabera, hau, ez litzateke gertatuko umeak emaitza okerraz nolabaiteko ulerkuntza izateagatik, baizik eta haurtxoek estimulu ekanduari erreparatzeko joera izaten dutelako.

Eztabaida puntu honen inguruan zenbait esperimentu egin dira argitu guran benetan zeri erreparatzen dioten umetxoek, aritmetikan oinarrituriko ekintza okerretara ala estimulu ekanduetara. Apika, ildo honetako esperimenturik interesgarrienetakoa Kosbayashi eta bere kolaboratzaileek (2004) burututakoa dugu.

Esperimentu hau, Wynn-enean bezala, presuntzio haustuaren metodologian datza eta umetxoek begiratze-jokabide ezberdina agertzen zuten $1 + 1 = 2$ ala $1 + 1 = 1$ moduko eszenetan. Alde nabarmena ordea zera zen: estimulu ikusizkoekin batera entzunezkoak ere ematen zirela; hau da 1 panpinatxo + 1 soinua = 2 (aurreikusteko modukoa).

Hartara ikerlariak haurtxoak ikusten ohitzen zituzten objektu batzuek superfizie baten kontra jotzen zutela eta, ondorioz, zarata sortzen zutela. Geroan, inpaktuaren unea ezkutatzen zen pantailatxo baten bidez eta haurtxoek, nolabait, asmatu beharra zuten objektuak superfiziearen kontra talka egiten zutela. Test fasean umetxoak beti lehenengo objektua ikusten zuen baina bigarrena eta, bere kasuan, hirugarren bat ere, ez ziren ikusten; izan ere, pantaila bat jasotzen zen eszena estaltzeko. Ikusizko estimuluaren ordeaz umetxoak aditzen zuen inpaktu baten soinua (ala, bere kasuan, bi).

	<i>Presuntzioa hausten duen gertaera</i>	<i>Aurreikuste moduko gertaera</i>
1. testa	1 objektu + 2 soinu = 2 jazoera	1 objektu + 1 soinu = 2 jazoera
2. testata	1 objektu + 1 soinu = 3 jazoera	1 objektu + 2 soinu = 3 jazoera

Taula 2. Gertaera mota umeen aritmetika abileziak aztertzeko (Ksbayashi et al. , 2004)

Bigarren taulan erakusten dira zeintzuk izan ziren ikerlari hauek erabili zituzten aurreikuste moduko gertaerak eta presuntzioa hausten zutenak; hain zuzen ere, filmatuz, aztertzeko zein zen umetxoen begiratze jokabidea.

Emaitzek ez zuten ezbaietarako tarterik uzten; izan ere, haurtxoek estatistikoki luzaroago so egiten zuten presuntzioak hausten zituzten eszenetara, aurreikuste modukoetara baino. Kasu honetan Hunter eta Ames-en (1988) estimulu ekanduen argudioak ezin zuen azaldu gertaera; izan ere, lehenengo estimulua eta azkena ez datoz bat baina, horrez gain, datu berriak mahairatzen ziren umetxoen aritmetika abilezien inguruan zeren eta haurtxoak kapaz ziren zentzumen ezberdinez jasotako informazioa konbinatzeko. Esperimentu sorta hauen egileen ustez:

Ikerlari batzuen ustez umetxoek ez dute erantzuten [estimuluen] zenbakizko propietatetara baizik eta, estimuluen ez-zenbakizko ezaugarrietara (esaterako, superfiziearen azalera ala ikusizko objektuen ingeradaren luzera)...hala eta guztiz ere, ikerlan honetan umetxoen jokabidea ezin da esplikatu [eszenen] karakteristika sentsorial hauen bidez zeren eta ikusizko zein entzunezko objektuak erabili dira (Kosbayashi et al., 2004, 31.orr.).

Egileek ondorioztatzen zuten umeek adierazten zuten aritmetikarako abilitateak ez daudela zentzumen mota bakar baten pean eta zentzumen ezberdineko informazioa integratu ahal izateko, ezinbestean, bost hilabeteko haurtxoek estimuluen ezaugarri zenbakizkoen gainean halako irudikapen abstraktuak eratu behar zituztela.

4.3.2. Kopuru handiko multzoez hautemateko sistema

Bestalde, arestian aipatu bezala, objektu multzo txikiak hautemateko gaitasunaz aparte, egungo modelorik onartuenaren arabera umeak bestelako sistema baten bidez ohartu eta irudikatzen ditu kantitate eta multzo handiak (esaterako 8, 12, 18, 32 puntuz osaturiko laminak) (Brannon, 2006; Féron et al., 2006; Nieder, 2005; Spelke eta Kinzler, 2007; Xu eta Arriaga 2007; Xu et al., 2005).

Estimuluen zenbakizko erregulartasunak hautemateko bigarren sistema honek, ordea, aurrekoarekin parekaturik zenbait berezitasun ditu. Lehenbizi, aipatu beharra dago objektu bildumen gaineko gutxi gorabeherako estimazioak baino ez dituela ahalbideratzen eta estimazioak egiteko gaitasun hau oso lotuta dagoela bereiztekoak diren kantitateen arteko ratioarekin, baita umearen adinarekin ere.

Hala, 6 hilekin haurtxoek bereizten dituzte 1:2 ratioko zenbatekotasunak (esaterako, umei 8 puntuz osaturiko erakuskaria bereizgarri egiten zaie 16 puntu duen beste batetik) baina ez, ordea, 2:3 ratiokoak (8 *versus* 12). Azken ratio hau, ordea, bereizteko gauza dira 9-10 hilabeterekin baina kale egiten dute 4:5 ratioko kantitateak antzemateko (esperimentu hauek ikusgarri daude Xu-k eta Arriagak, 2007, argitaraturiko ikerlan interesgarrian).

Honekin batera aipatzekoa da zenbatekotasunak irudikatzeko gutxi-gorabeherako sistema hau (literaturan "analog magnitude representations" delako izenez ezagutua) aurkitu egin dela ume txikietan ez ezik, gizaki nagusietan eta bestelako primatetan ere (honen inguruko erreferentzia-bilduma egokia Brannon-ek (2006) eta Xu-k eta al.-ek (2005) eskaintzen dute.

Edonola ere, kasu guztietan ikusi da esperimentuetako subjektuek adierazten duten multzoen arteko bereizpenak egiteko

gaitasuna hobetuz doala multzoen arteko aldea handitu ahala baina, betiere, kantitateen arteko ratioarekin lotuta, ez balio absolutuarekin (Weber-ren arabera, alegia).

Bestalde, ikerlanetan erregistratu da ikusizko zein entzunezko estimuluekin ondorio antzekoetara iristen dela, beraz, sistema honek ez du erlazorik estimuluen izaerarekin (Xu eta Arriaga, 2007; Spelke eta Kinzler, 2007). Azken ideia honek iradokitzen du gizakiotan zenbakien errepresentazio abstraktuak egon litezkeela oso etapa goiztiarretatik (Féron et al., 2006).

Amaitzeko nabarmendu beharra dago egun ez dela ezagutzen zergatik magnitude analogikoen moduko sistema honek kale egiten duen zenbatekotasun txikiak irudikatzeko. Fei Xu eta kolaboratzaileen ustetan (2005), litekeena da zenbatekotasun txikiekin ere sistema honek esku hartzea baina ikusitako "object file" delako sistema inhibitzailea suerta lekioke. Alabaina, autoreek aitortzen dute hauxe dela oraindik-orain ikertu beharra dagoen atala.

5. Ondorioak

Zenbakizko kognizioaren inguruan egin den ikerkuntzak eskaintzen dituen datuen arabera ezin da pentsatu gaitasun hau gizaki nagusiei eskusibaz dagokienik. Artikulu honen zehar azaldu den bezala hainbat ebidentziak argi azalarazten dute hilabete gutxiko haurrek duten ingurumariako erregulartasun zenbakizkoetz jabetzeko ahalmena. Bestalde, hainbat ikerlanek nabarmendu dute zenbait animalia ere estimuluen karakteristika kuantitatiboez jabetzeko ahalmena izan badutela (Jordan eta Brannon, 2006; Flombaum et al., 2005; Nieder, 2005; Lyon, 2003).

Haurren kasuari dagokionez, 3. taulan aurkezten da umeen aritmetika abilezien garapenaren gaineko ikerkuntzak agertu dituen datuen laburpena (Butterworth, 2005).

ADINA (urte- hila)	JAZOERA
0-4	Zenbatasun txikiak diskrimina ditzakete
0-11	Goranzko sekuentziak bereizten dituzte beheranzkoetatik
2-0	Zenbatze-hitzak ikasten hasten dira
2-6	Zenbatze-hitzak objektu bat baino gehiago adierazteko erabiltzen direla ulertzen dute
3-0	Zenbat ditzakete objektu kopuru txikiak
3-6	Gehitu bat ala kendu bat bezalako ekintzak egin ditzakete objektuekin, baita zenbatze-hitzekin ere
	Multzo badi dagokion kardinal-zenbakia ezar dezakete
4-0	Hatzen bidez batuketak egiten dituzte
5-0	Zenbaki txikiak gehi ditzakete, zenbaketak egin gabe
5-6	Batuketaren trukitze-propietatea (lege konmutatiboa) aplikatzen dute
	30-40 arteko zenbatze-hitzak esan ditzakete.
6-0	Piageten ikuspegiko zenbakiaren iraunkortasun kontzeptua bereganatu dute
6-6	Batuketa eta kenketaren arteko osagarritasun-zentzua dute
	80 arte, gutxi gorabehera, zenbatze-hitzak esan ditzakete
7-0	Aritmetikako egitateak memoriatik eskura ditzakete

Taula 3. Aritmetikaren bilakaerako mugarren estimazio kronologikoa (Butterworth, 2005)

Datu hauek eta idazki honen zehar agerturiko panorama laburbilduz, lehenbiziko ondorio gisa aipa daiteke Piagetek zenbaki-zentzua osoaren ulerkuntzarako ezartzen zuen muga baino dezente lehenago, haurraren pentsamendu matematikoaren bilakaera, bere aberastasun kognitiboagatik, arretaz aintzat hartzeko fenomeno dela.

Hirugarren taulan Butterworth-ek (2005) aurkezten duen mugarren estimazio kronologikoan, mintzamenak bi aroren arteko muga ezartzen du. Lehendabizikoa zenbatze-hitzak errateko gauza izan baino lehenagokoa da (hau da, bi urte baino lehen) eta honetan badirudi umeak zabalduz doala bere sortzetiko gaitasuna inguruko estimuluetako erregularitasun zenbakizkoei erreparatzeko (Diaz, 2006). Etapa honetaz zera laburbil daiteke:

1. Hilabete gutxiko haurrek ere gaitasuna dute zenbakizko informazioa detektatzeko.
2. Zenbakizko informazioa ikusmen, entzumen eta ukimenaren bidetik jaso dezaketela; bereizita ala zentzumen ezberdinetatik jasotako informazioa integratuz.

3. Aritmetika oinarrikoarekin loturiko akzioez jabetzeko gauza dira.
4. Aurreko ideietatik eratortzen da haurtxoak gauza direla entitate ezberdinen zenbatekotasunaren abstrakzioa egin, memorian izan eta informazio berriarekin konparatzeko.
5. Abilezia hauek kultura eta mintzairaren eskuratzeko prozesutik independenteak dira.

Idea hauek bat datoz giza kognizioaren inguruan egin diren ikerketekin zeinen arabera sortzetiko lau kognizio sistemak karakterizatzen dute giza kognizioa: (a) izate bizigabeak eta euren interakzio mekanikoenak, (b) pertsonen jokabidea eta euren asmoenak, (c) distribuzio espaziala eta bere erlazio geometrikoenak eta (d) multzoak eta euren ordenatze, batze eta kentze erlazio zenbakizkoenak (Spelke eta Kinzler., 2007).

Sortzetiko ahalmen hauetatik umeak bide luzea egin beharko du gizarteak adosturik duen matematikaren gaineko ezaguera formalera. Bide honen hasiera 2 urte inguruan kokatzen da, zenbatze-hitzak erabiltzen ikaskuntzarekin eta bide horren helmuga, zenbatze-printzipioen eraketa izango da (Gelman eta Gallistel, 1978; Gelman eta Meck, 1983).

Garai honetan haurrak zenbatze-hitzekin egiten duen erabilpena doitu joango da ingurutik jasotzen duen exijentziara eta doitze-prozesua hau erabilpen estereotipatueta oinarritzen bide da. Erabiltze mota honen bidez umeak matematika sinboloez (kasu honetan, berbazko sinboloez) baliatzen hasiko da zenbakien zentzu osoa bereganatuta izan aurretik baina erabiltze haxe izango da, hain zuzen, kontzeptuaren hezurmamitzen lagunduko diona. Fase honetan gerozo zenbaki adieraren fundamentuak ezartzen diren aldetik benetako pentsamendu matematikoaren pausutzat jotzeko modukoa da, zenbakien zentzuaren gaineko erabateko ulertzearekin identifikatzerik izan gabe ere.

Operazio-aurreko etaparen amaierak beste une garrantzitsua ekarriko du: ordinal eta kardinal adieraren ulertze osoa, Piagetek adierazi lez, zenbakiaren inguruko ulertze osoa ahalbideratuko duena. Une honetan haurrak pertzepzio bidezko informazio aldakorra gorabehera, zenbakiak irauten duelako printzipio bereganatua izango du.

Edonola ere, akaso ikuspegi piagetiarra osatu beharra dago artikulu honen zehar agerturiko datu berriekin zeinek iradokitzen dute ia-ia jaiotzatik bertatik haurren pentsamendu matematikoaren bilakaera kontuan hartzeko moduko dela, gerozo matematika nozioen ulerkuntzan izan ditzakeen ondorioengatik ez ezik bere berezko prozesuetako joritasunagatik ere.

Bibliografía

- Alonso, D. eta Fuentes, L. (2001): "Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático", *Revista de Neurología*, **33**, 568-576.
- Baillargeon, R. (1987): "Object permanence in 3.5- and 4.5-month-old infants", *Developmental psychology*, **23**, 655-664.
- Baillargeon, R., Spelke, E. S. eta Wasserman, S. (1985): "Object permanence in five-month-old infants", *Cognition*, **20**, 191-208.
- Benigno, J.; Ellis, S. (2004): "Two is greater than three: effects of older siblings on parental support of preschoolers' counting in middle-income families", *Early Childhood Research Quarterly*, **19.1**, 4-20.
- Brannon, E. (2006): "The representation of numerical magnitude". *Current Opinion in Neurobiology*, **16.2**, 222-229.
- Brannon, E.; Lutz, D. eta Cordes S. (2006): "The development of area discrimination and its implications for number representation in infancy", *Developmental Science*, **9.6**, 59-64.
- Bryant, P. (1996): "Mathematical Understanding in the Nursery School Years", *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*, Psychology Press, 53-67.
- Butterworth B. (2005): "The development of arithmetical abilities", *Journal of Child Psychology and Psychiatry* **46**, 1, 3-18.
- Chamorro, M., Belmonte J., Ruiz, M., Vecino, F. (2006): *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*, Madrid, Prentice Hall.
- Cherries, E.; Wynn, K. eta Scholl, B. (2006): "Interrupting infants' persisting object representations: an object-based limit?", *Developmental Science* **9.5**, 50-58.

- Chiang, W.C., eta Wynn, K. (2000): "Infants' representations and teaching of objects: implications from collections", *Cognition*, **77**, 169-195.
- Cohen, K.R., Cohen, K.K., Kaas A., Henik, A. eta Goebel, R. (2007): "Notation-dependent and -independent representations of numbers in the parietal lobes", *Neuron* **53**, 307-314.
- Cohen, L. B. eta Marks, K. S. (2002): "How infants process addition and subtraction events?", *Developmental Science*, **5**, 186-212.
- Daniel. A. (2007): "Does the Parietal Cortex Distinguish between "10," "Ten," and Ten Dots?", *Neuron*. **53.2**,165-7.
- Díaz, R. (2006): "Innatismo y Cultura en el Aprendizaje de la Noción de Número", *Revista Cognición*, **5**, 37-50.
- Durkin, K., Shire, B., Riem, R., Crowther, R. eta Rutter, D. (1986): "The social and linguistic context of early number development", *British Journal of Developmental Psychology*, **4**, 269-288.
- Feigenson, L., Dehaene, S. eta Spelke, E. S. (2004): "Core systems of number", *Trends in Cognitive Sciences*, **8**, 307-314.
- Feron, J., Gentaz, E. eta Streri, A. (2006): "Evidence of amodal representation of small numbers across visuo-tactile modalities in 5-Month-old infants", *Cognitive development*, **21.2**, 81-92.
- Flombaum, J., Junge, J. eta Hause, M. (2005): "Rhesus monkeys (Macaca mulatta) spontaneously compute addition operations over large numbers", *Cognition*, **97.3**, 315-25.
- Fuson, K. C., Lyons, B., Pergament, G. eta Hall, J. W. (1988): "Effects of collection terms on class-inclusion and on number tasks", *Cognitive Psychology*, **20**, 96-120.
- Gelman, R. (1972): "The nature and development of early number concepts", in H. Reese, *Advances in Child Development and Behavior*, Academic Press, New York, 115-67.
- Gelman, R. eta Gallistel, C. (1978): *The child's understanding of number*, Harvard University Press.
- Gelman, R. eta Meck, E. (1983): "Preschooler's counting: principles before skill", *Cognition*, **13**, 343-360.
- Gréco, P. (1962): "Quantité et quotité", *Structures numeriques elementaires*, P.U.F., Paris.
- Hunter, M. eta Ames, E. (1988). A multiple model of infant preferences for novel and familiar stimuli. Ondoko honetan:

- C. Rovee-Collier, et al. L. P. Lipsitt (Editors), (5) (69-95). *Advances in infancy research*, Norwood, NJ: Ablex.
- Jordan, K. E. et al. Brannon, E. M. (2006): "Weber's law influences the numerical representations in rhesus macaques (*Macaca mulatta*)", *Animal Cognition* **9**, 159-172.
- Kahneman, D., Treisman, A. et al. Gibbs, B. (1992): "The reviewing of object files: Object-specific integration of information", *Cognitive Psychology*, **24**, 175-219.
- Kobayashi, T., Hiraki, K., Mugitani, T. et al. Hasegawa, T. (2004): "Baby arithmetic: One object plus one tone", *Cognition*, **91.2**, 23-34.
- Lyon, B. (2003). Egg recognition and counting reduce costs of avian conspecific brood parasitism. *Nature*, **422**, 495-499.
- Mehler et al. Bever (1967): "Cognitive Capacity of very young children", *Science*, **158**, 141-142.
- Mitroff, S., Scholl, B. et al. Wynn, K. (2005): "The relationship between object files and conscious perception", *Cognition*, **96.1**, 67-92.
- Nieder, A. (2005): "Counting on neurons: The neurobiology of numerical competence", *Nature Reviews Neuroscience*, **6**, 177-190.
- Noles, N., Scholl, B. J. et al. Mitroff, S. R. (2005): "The persistence of object-file representations", *Perception et al. Psychophysics*, **67**, 324-334.
- Piaget, J. (1965). The child's conception of number, New York, Norton.
- Piazza A., Pinel, P., Bihan, D. et al. Dehaene, S. (2007): "A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex", *Neuron*, **53.2**, 293-305.
- Sfard, A. (2000a): "Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other", in P. Cobb, K. Yackel, et al. K. McClain, *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design*, NJ: Erlbaum. Mahwah, 37-98.
- Sfard, A. (2000b): "Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects", *Journal for Research in Mathematics Education*, **31.3**, 296-327.
- Simon, T., Hespos, S. et al. Rochat, P. (1995): "Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992)". *Cognitive development*, **10**, 253-269.

- Sophian, C. (1988): "Limitations on preschool children's knowledge about counting: Using counting to compare two sets", *Developmental psychology*, **24**, 634-640.
- Spelke, E.S. eta Kinzler, K. D. (2007): "Core knowledge. Developmental", *Science* **10**, 89-96.
- Starkey, P. eta Cooper, R. G. (1980): "Perception of numbers by human infants", *Science*, **210**, 1033-1035.
- Starkey, P. Spelke, E. S., eta Gelman, R. (1983): "Detection of intermodal numerical correspondences by human infants", *Science*, **222**, 179-181.
- Uller, C., Huntley-Fenner, G., Carey, S. eta Klatt, L. (1999): "What representations might underlie infant numerical knowledge?", *Cognitive development*, **14**, 1-36.
- Welberg, L. (2007): "What counts?". *Nature Reviews Neuroscience* **8**, 168-169.
- Wynn, K. (1992): "Addition and subtraction by human infants". *Nature*, **358**, 749-750.
- Xu, F. eta Arriaga, R. (2007): "Number discrimination in 10-month-old infants", *British Journal of developmental psychology*, **25**, 103-108.
- Xu, F., Spelke, E. eta Goddard, S. (2005): "Number Sense in Human Infants", *Developmental Science*, **8.1**, 88-101.