# Diferencias finitas aplicadas a ecuaciones en derivadas parciales

Segundo curso – Grado en Física

# Índice

# Ecuación de Laplace

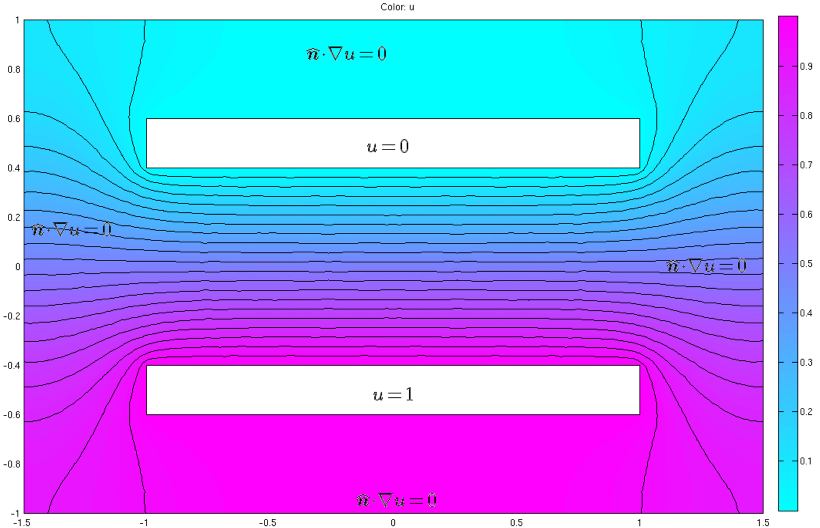
- La ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 u = 0. \tag{1}$$

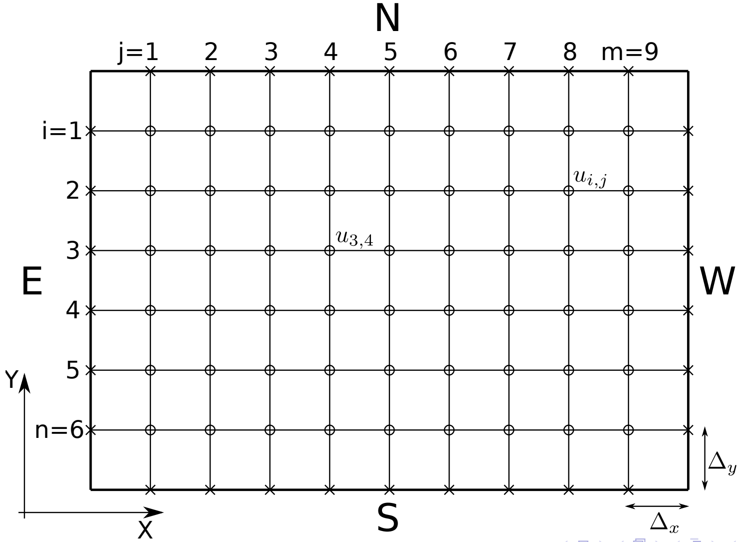
- Sea $\tau$ el dominio de integración y $S$ su contorno.
- Condiciones de contorno
    - Condiciones de Dirichlet: $u$ conocido en $S$.
    - Condiciones de Neumann: $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u$ conocido en $S$.
    - Otras . . . .
- En coordenadas cartesianas bidimensionales

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

# Ejemplo: condensador de placas plano paralelas



# Mallas bidimensionales



# Aproximación FD en malla bidimensional

- Supongamos, por sencillez, condiciones de contorno de Dirichlet.
- La función $u$ está dada en los nodos de los contornos.
- Las incógnitas son únicamente los nodos interiores. Se representan mediante una "matriz" $n \times m$ de elementos $u_{i,j}$.
- La aproximación FD de la ecuación de Laplace es

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2} = 0; \qquad (3)$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

# Condiciones de contorno de Dirichlet

- Ecuación de Laplace en el dominio rectangular $0 < x < 10, 0 < y < 10$.
- Condiciones de contorno de Dirichlet

$$\begin{aligned} u(x, y = 10) &= 1 \text{ cara } \mathbf{N} && (4) \\ u(x = 0, y) &= 1 \text{ cara } \mathbf{W} && (5) \\ u(x, y = 0) &= 0 \text{ cara } \mathbf{S} && (6) \\ u(x = 10, y) &= 0 \text{ cara } \mathbf{E} && (7) \end{aligned}$$

- Lo resolvemos mediante SOR (fichero *FD2D.m*)

$$u_{i,j} = \frac{\Delta_x^2 \Delta_y^2}{2\Delta_x^2 + 2\Delta_y^2} \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2} \right). \qquad (8)$$

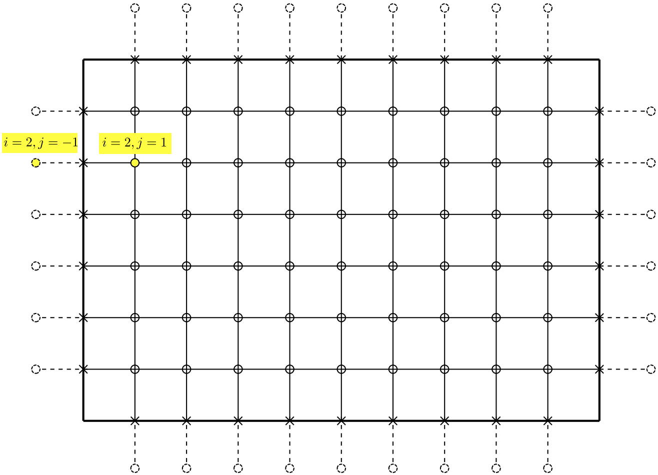
# Condiciones de contorno de Neumann

- Condiciones de contorno de Neumann (normales hacia el interior)

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial u}{\partial y}(x, y=10) &= 1 \text{ cara } \mathbf{N} \qquad (9)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(x=0, y) &= 1 \text{ cara } \mathbf{W} \qquad (10)\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, y=0) &= 0 \text{ cara } \mathbf{S} \qquad (11)\\
-\frac{\partial u}{\partial x}(x=10, y) &= 0 \text{ cara } \mathbf{E} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

- Lo resolvemos mediante SOR (fichero *FD2D.m*) igual que en el caso de las condiciones de Dirichlet.
- La condicion de Neumann se implementa mediante una malla *extendida*, con nodos ficticios.

# Condiciones de contorno de Neumann



# Condiciones de contorno de Neumann

- Calculamos las derivadas en los nodos de la frontera, *e.g.* el nodo $i = 2$, $j = 1$, en función de nodos ficticios

$$\frac{u_{2,1} - u^{*}_{2,-1}}{2\Delta_x} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{2,0} \tag{13}$$

- Aplicamos SOR sobre una malla que incluya a los nodos virtuales $i = 0, \ldots, n+1$, $j = 0, \ldots, m+1$.
- Previamente a cada paso de iteración, forzamos los valores en los nodos ficticios

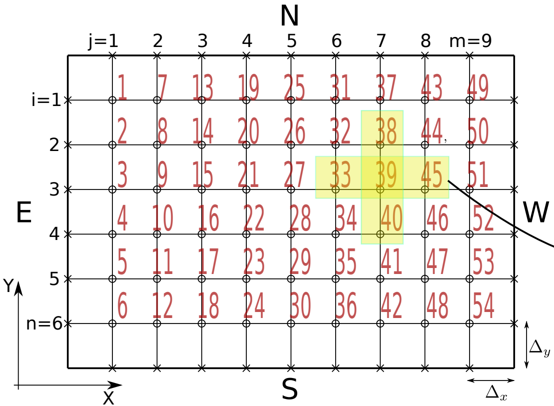
$$u^{*}_{2,-1} = u_{2,1} - 2\Delta_x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{2,0}. \tag{14}$$

- Los nodos ficticios se tratan como los nodos del contorno en el problema de Dirichlet.

# Ecuación de Laplace en dominio cuadrado

- ¿Podríamos resolver el problema de la ecuación de Laplace en el dominio cuadrado mediante un sistema lineal de ecuaciones $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$, donde
  - $\mathbf{A}$ es una matriz que representa la aproximación al laplaciano $\nabla^2 u$.
  - $\mathbf{y}$ es un vector cuyas componentes son los valores de la solución en cada punto de la malla.
  - $\mathbf{b}$ es un vector que dependerá de los valores de las condiciones de contorno.
- En principio sí, si arreglamos los valores $u_{i,j}$ en un vector monodimensional.
- Por ejemplo, definiendo $\mathbf{y}$ como $y_{i+(j-1)*n} = u_{i,j}$.

# Numeración de los nodos




$$\frac{y_{38}-2y_{39}+y_{40}}{\Delta_y^2}+\frac{y_{33}-2y_{39}+y_{45}}{\Delta_x^2}$$

# Numeración de los nodos

- Afortudamente, Matlab cuenta con algunas funciones que nos ayudaran a numerar los nodos de la malla[**?**].
- La función *numgrid* numera una malla elegida de entre un “catálogo” de mallas.
- La función *delsq* genera el *operador* laplaciano aplicable a una malla.
- Ejemplo:
  - S = numgrid('S',10)
  - D = delsq(S)
  - spy(D)
- La matriz del laplaciano es de alta dimension $m^2 \times n^2$ pero tiene muchos elementos nulos. Se dice que es una matriz *dispersa* (*sparse*). La función *spy* nos muestra su estructura.

# Manejo de contornos

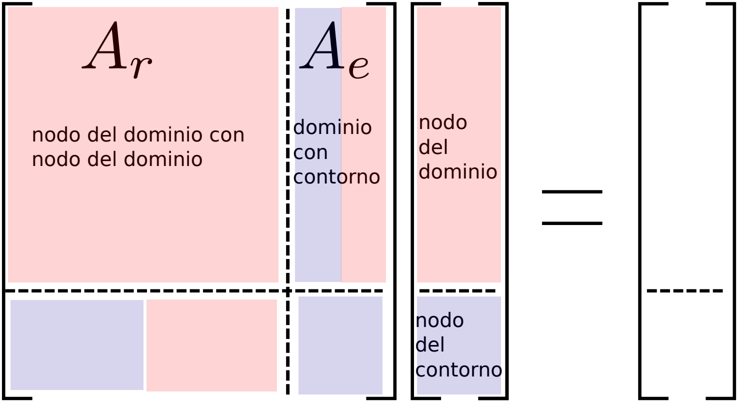
- La función *numgrid* coloca ceros en los contornos.
- Para poder imponer condiciones de Dirichlet arbitrarias, convienen numerar también los nodos de los contornos.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 20 | 27 | 0 |
| 0 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 21 | 28 | 0 |
| 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 22 | 29 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16 | 23 | 30 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 17 | 24 | 31 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 25 | 32 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 19 | 26 | 33 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 37 | 39 | 41 | 43 | 48 | 50 | 52 | 0 | 0 |
| 0 | 34 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 20 | 27 | 54 | 0 |
| 0 | 35 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 21 | 28 | 55 | 0 |
| 0 | 36 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 22 | 29 | 56 | 0 |
| 0 | 0 | 38 | 40 | 42 | 44 | 16 | 23 | 30 | 57 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 45 | 17 | 24 | 31 | 58 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 46 | 18 | 25 | 32 | 59 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 47 | 19 | 26 | 33 | 60 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 49 | 51 | 53 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

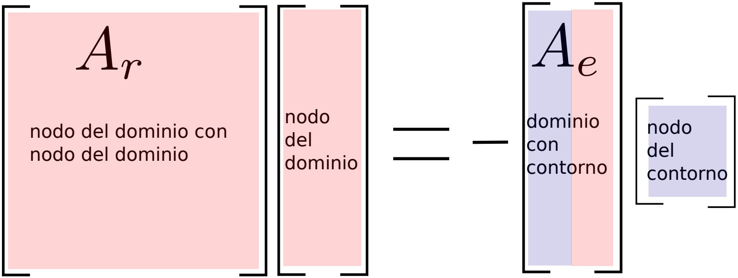
# Manejo de contornos

- La matriz laplaciana aplidada a la malla con contornos tiene la siguiente estructura



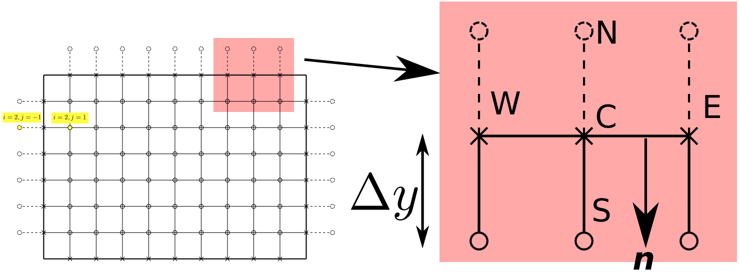
# Manejo de contornos

- El sistema de ecuaciones a resolver tiene la siguiente estructura



# Condiciones de contorno de Neumann

- Las condiciones de contorno de Neumann se trataron mediante *nodos virtuales*.
- Elaboramos los cálculos para poder aplicarlos con más facilidad al caso de resolución directa del sistema de ecuaciones.



# Condiciones de contorno de Neumann

- Calculamos la derivada en el contorno

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \approx \frac{u_S - u_N}{2\Delta y}. \tag{15}$$

- En el laplaciano numérico calculado en $C$, sustituimos $u_N$ por su valor en función de la derivada normal

$$\nabla^2 u(C) = \frac{2u_S - 2u_c - 2\Delta y \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}}{\Delta y^2} + \frac{u_W - 2u_c - u_E}{\Delta y^2} \tag{16}$$

- En el sistema de ecuaciones, el término

$$2\frac{1}{\Delta y}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

pasa al lado del término independiente.

# Bibliografía


- C. Moler, *Numerical computing with Matlab*. Disponible en http://www.mathworks.com/moler/.
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1990. Disponible en http://www.nr.com/oldverswitcher.html.
- Ross L. Spencer, Michael Ware, *Computational Physics 430: Partial Differential Equations*. Deparment of Physics and Astronomy, Brigham Young University. Disponible en http://www.physics.byu.edu/Courses/Computational/.