Problemas de Condiciones de Contorno para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Segundo curso – Grado en Física

Índice

ODEs: Problemas de valor inicial

- Se definen como

$$y'(t) = f(t, y) \text{ con } y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

donde y puede ser un "array".

- Dentro de unas condiciones muy razonables[1] (e.g. f y sus derivadas acotadas) tiene solución única.
- Ejemplo: $y'' + y = 0$ con $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
  - La solución analítica es $y(t) = \text{sen}(t)$.
  - Es de la forma 1 definiendo $y_1 \equiv y$, $y_2 \equiv y'$.
- Múltiples métodos de resolución numérica: *e.g. Runge–Kutta.*

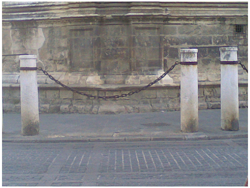
ODEs: problemas de contorno

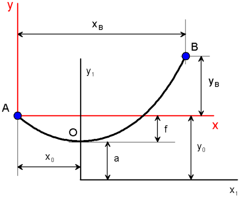
- Consideremos $N > 1$ ODEs acopladas, con n_1 condiciones en un punto y $n_2 = N - n_1$ condiciones en el otro
$$y'(t) = f(t, y', y) \text{ con } Ay(a) = \alpha, By(b) = \beta. \qquad (2)$$
donde y es un "array" de N elementos y A y B son matrices.
- En general, no se sabe si tiene solución.
- Ejemplos: $y'' + y = 0$ tiene por solución $y = c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)$, con c_1, c_2 constantes a determinar.
  - Exigiendo $y(0) = 0, y(\pi/2) = 1$ la solución única es $y = \operatorname{sen}(t)$.
  - Exigiendo $y(0) = 0, y(\pi) = 0$ existen múltiples soluciones de la forma $y(t) = c \operatorname{sen}(t)$.
  - Exigiendo $y(0) = 0, y(\pi) = 1$ no existe solución.

Ejemplos en Física

- Estática: una cuerda suspendida por sus extremos.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ con } y(0) = 0, y(x_B) = y_B. \tag{3}$$





- Electrostática: potencial eléctrico (*e.g.* entre dos placas plano paralelas)

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = -\rho(z)/\varepsilon_0 \text{ con } \phi(0) = 0, \phi(d) = V. \tag{4}$$

Métodos de disparo

- Consideremos, por sencillez, el siguiente problema de CC

$$y'' = f(t, y, y') \text{ con } y(a) = \alpha, y(b) = \beta. \tag{5}$$

- Consideremos el problema de CI

$$y'' = f(t, y, y') \text{ con } y(a) = \alpha, y'(a) = s. \tag{6}$$

- Los métodos de disparos se basan en hallar el valor de s para el cual $y(b) = \beta$.
- Por tanto, se componen de
  - un conjunto de integraciones de ODE con CI,
  - una busqueda de ceros de una función.
- Ejemplos: fichero "EXPLORACION_DISPARO.m", "DISPARO.m".

Métodos de disparo: autovalores

- Consideremos el problema de una cuerda vibrante sujeta por sus dos extremos.
- La ecuación para su desplazamiento $u(x,t)$ respecto al equilibrio es

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu(x)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (7)$$

- Las CC son $u(x=0,t) = 0, u(x=L,t) = 0$.
- Puede resolverse por *separación de variables* $u(x,t) = y(x)\tau(t)$, obteniendo

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \omega^2\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tau(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\mu(x)\omega^2}{T} y = 0 \quad \text{con} \quad y(x=0) = 0, y(x=L) = 0$$

Métodos de disparo: autovalores

- De la separación de variables se obtiene un conjunto de soluciones.
- La solución de un problema dado con ciertas condiciones iniciales será una suma (en general infinita) de las soluciones halladas mediante la separación de variables.
- El parámetro ω aparece al *separar* las ecuaciones para *y* y τ, de forma que existirá solución sólo para ciertos valores de ω (autovalores).
- Válido para problemas *lineales y homogéneos*.

Métodos de disparo: autovalores

- Para hallar los autovalores (valores de ω para los que existe solución) redefinimos el problema de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 && (8) \\ \frac{dy_2}{dx} &= -\frac{\mu(x)}{T} y_3 y_1 && (9) \\ \frac{dy_3}{dx} &= 0 && (10) \end{aligned}$$

  donde $y_1 \equiv y$, $y_2 \equiv y'$ y $y_3 \equiv \omega^2$.
- Las condiciones de contorno pasan a ser $y_1(x=0)=0$, $y_1(x=L)=0, y_3(x=0)=\omega^2$.
- Para ello *fijamos el valor de* $y'(0)$ y hallamos ω^2 mediante disparo (fichero *DISPARO_AUTOVALOR.m*).

Métodos de diferencias finitas

- Consideremos el siguiente problema de ODE con CC

$$\begin{aligned} y''(x) - 5y'(x) + 10y(x) &= 10x \qquad (11) \\ \text{donde } y(0) = 0, y(1) &= 100. \qquad (12) \end{aligned}$$

- Aproximación de *diferencias finitas* sobre un conjunto finito de puntos $x_i = i\Delta_x$, con $i = 1, 2, \ldots, N$.
- $y(x_i + j\Delta_x) =$

$$y(x_i) + j\Delta_x \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=x_i)} + \frac{1}{2}(j\Delta_x)^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x=x_i)} + \theta(\Delta_x^3).$$

- Entonces

$$\begin{aligned} y_i' &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta_x} + \theta(\Delta_x^2), \qquad (13) \\ y_i'' &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta_x^2} + \theta(\Delta_x^2). \qquad (14) \end{aligned}$$

Métodos de diferencias finitas

- El problema original

$$
\begin{aligned}
y''(x) - 5y'(x) + 10y(x) &= 10x && (15)\\
\text{donde } y(0) = 0, y(1) &= 100. && (16)
\end{aligned}
$$

- Se transforma en

$$
\begin{aligned}
\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta_x^2} - 5\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta_x} + 10y_i &= 10x_i && (17)\\
\text{donde } y_1(0) = 0, y_N &= 100. && (18)
\end{aligned}
$$

- El sistema de ecuaciones resultante (en y_i) es una aproximación de *diferencias finitas* a la solución del problema original $y(x)$ sobre un conjunto finito de puntos $x_i = i\Delta_x$, con $i = 1, 2, \ldots, N$.

Métodos iterativos

- Tratamos ahora de resolver las ecuaciones de diferencias finitas, *i.e.* sobre las y_i.
- Los *métodos iterativos* constituyen una forma de solución alternativa a la *solución directa*.
- Re–escribamos la ecuación para las y_i como

$$y_i = \frac{1}{2-10\Delta_x^2}\left[\left(1-\frac{5\Delta_x}{2}\right)y_{i+1}+\left(1+\frac{5\Delta_x}{2}\right)y_{i-1}-10\Delta_x^2 x_i\right]. \tag{19}$$

- El *método de Jacobi* halla una solución a través de iteraciones donde el paso j-ésimo, $y_i^{(j)}$ viene dado

$$y_i^{(j)} = \frac{1}{2-10\Delta_x^2}\left[\left(1-\frac{5\Delta_x}{2}\right)y_{i+1}^{(j-1)}+\left(1+\frac{5\Delta_x}{2}\right)y_{i-1}^{(j-1)}-10\Delta_x^2 x_i\right] \tag{20}$$

Métodos iterativos

- El *método de Gauss-Seidel* utiliza los valores de la iteracion j-ésima en cuanto están disponibles

$$y_i^{(j)} = \frac{1}{2 - 10\Delta_x^2}\left[\left(1 - \frac{5\Delta_x}{2}\right) y_{i+1}^{(j-1)} + \left(1 + \frac{5\Delta_x}{2}\right) y_{i-1}^{(j)} - 10\Delta_x^2 x_i\right]. \tag{21}$$

- El *método de sobre-relajación sucesiva (SOR)* añade a cada iteración una fracción α de la diferencia entre las dos últimas iteraciones:

$$\bar{y}_i^{(j)} = y_i^{(j)} + \alpha\left[y_i^{(j)} - y_i^{(j-1)}\right]. \tag{22}$$

- Dependiendo de los valores de α puede obtenerse convergencia mejorada o inestabilidad. El valor $\alpha = 0$ reproduce el método Gauss-Seidel.
- Ejemplos: ficheros *ODE_ITERATIVO.m*.

Diferencias finitas: solución directa de problemas lineales

- Las ecuaciones de FD son un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales.
- Las podemos resolver por los métodos habituales para resolución de sistemas lineales de ecuaciones (fichero *FDSD.m*).
- En este caso, la matriz del sistema de ecuaciones es TRIDIAGONAL (relaciona cada nodo con los vecinos). Las ecuaciones para N nodos son de la forma

$$a_{i-1,i}y_{i-1} + a_{i,i}y_i + a_{i,i+1}y_{i+1} = d_i \text{ con } i = 1, \ldots, N, \qquad (23)$$

  donde se ha supuesto que los nodos del contorno se dan para $i = 0$ e $i = N + 1$.

Diferencias finitas: solución directa de problemas lineales

- La matriz del sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{pmatrix} \tag{24}$$

- Para los nodos del contorno, hay que tener en cuenta

$$a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 = -a_0 y_0 \tag{25}$$

$$a_{N,N-1}y_{N-1} + a_{N,N}y_N = -a_N y_{N+1} \tag{26}$$

- El sistema de ecuaciones es de la forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Diferencias finitas: solución directa de problemas NO lineales

- En el caso de problemas no lineales

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0. \tag{27}$$

- Puede elaborarse una aproximación de diferencias finitas sobre la malla $x = i\Delta_x$, con $i = 0, \ldots, N+1$, obteniendo N ecuaciones no lineales

$$f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta_x}, \frac{y_{i+1} - 2y_i - y_{i-1}}{\Delta_x^2}) = 0. \tag{28}$$

- El sistema de ecuaciones resultante puede resolverse por los métodos iterativos habituales para resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, a partir de una estimación inicial de la solución (*e.g. métodos de Newton*).

Ecuaciones en derivadas parciales: diferencias finitas

- De nuevo la ecuación de una cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu(x)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{29}$$

con CC $u(x_a,t) = 0; u(x_b,t) = 0$ y CI para $u(x,t=0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$.

- Discretización de FD en $x_i = i\Delta_x$ y $t_j = j\Delta_t$

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta_t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^{j-1}}{\Delta_x^2} = 0. \tag{30}$$

donde $u_i^j = u(x_i,t_j)$ y $c^2 = T/\mu$.

- Despejando u_i^{j+1}

$$u_i^{j+1} = \frac{\Delta_t^2 c^2}{\Delta_x^2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + 2\left(1 - \frac{\Delta_t^2 c^2}{\Delta_x^2}\right) u_i^j - u_i^{j-1}. \tag{31}$$

Condiciones iniciales

- Para la CI tendríamos

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta_t} = g(x_i). \tag{32}$$

- Despejamos u_i^{-1} y lo introducimos en la expresion general

$$u_i^1 = \frac{\Delta_t^2 c^2}{2\Delta_x^2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + \left(1 - \frac{\Delta_t^2 c^2}{\Delta_x^2}\right) u_i^0 + \Delta_t g(x_i) \tag{33}$$

- Resolución con Matlab del problema de la cuerda: fichero *FDTD1D.m*.

Bibliografía

- J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, 1980.
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1990. Disponible en `http://www.nr.com/oldverswitcher.html`.
- Ross L. Spencer, Michael Ware, *Computational Physics 430: Partial Differential Equations*. Deparment of Physics and Astronomy, Brigham Young University. Disponible en `http://www.physics.byu.edu/Courses/Computational/`.
- R. Haberman, *Elementary applied partial differential equations*, Prentice Hall, 1983.